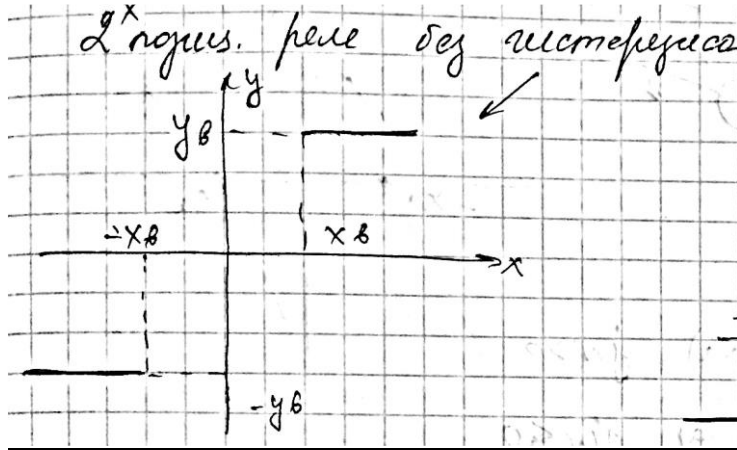


## Билет №7

1) Нелинейные элементы с однозначными разрывными характеристиками: двухпозиционное реле без гистерезиса, трехпозиционное реле без гистерезиса, идеальное двухпозиционное реле.

Это доопределенное реле. Не идеальное двухпозиционное реле не является неразрывным.

Есть область (ноль) – она не определена.



На выходе нет ни первого, ни второго значения, то есть 3 состояние.

### Ответ

Но существуют и такие реле, у которых средний контакт не имеет нейтрального положения. Он может только перескакивать из одного крайнего положения в другое (рис. 136, а). Статическая характеристика такого реле показана на рис. 136, б. При

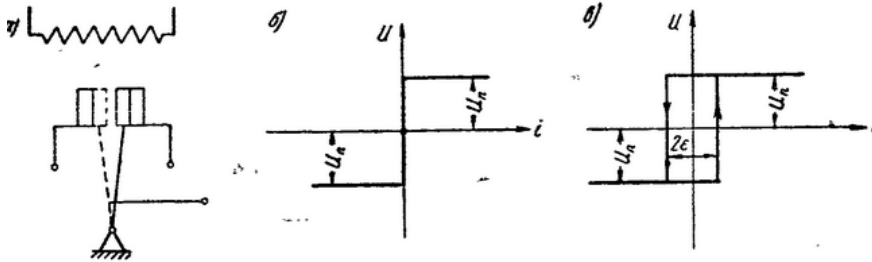
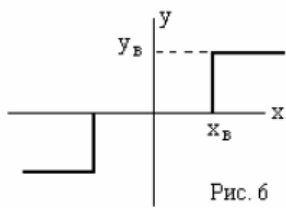


Рис. 136. Характеристика двухпозиционного реле: а) схема; б) характеристика без гистерезиса; в) характеристика с гистерезисом

учете гистерезиса статическая характеристика будет иметь вид, показанный на рис. 136, в.

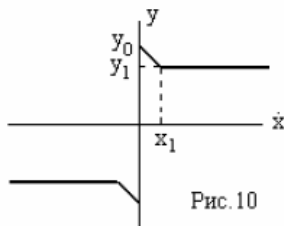
Все рассмотренные статические характеристики существенно нелинейны, так как их нельзя заменить прямыми линиями даже при самом малом отклонении координат. Релейные регуляторы, имеющие статическую характеристику типа рис. 135, б, в, называют трехпозиционными, а типа рис. 136, б, в — двухпозиционными. Двухпозиционное регулирование называют также регулированием по принципу «включено-выключено».

### 4.3 Звено типа “трехпозиционное реле без гистерезиса”



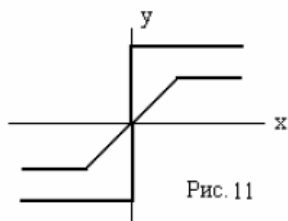
Характеристика звена типа “трехпозиционное реле без гистерезиса” показана на рис.6. Эта характеристика может быть получена в результате охвата звена с характеристикой, показанной на рис.5, положительной обратной связью (путем установки перемычки 5 нелинейного блока).

### Идеальное двухпозиционное реле



Как правило, при моделировании сухое трение воспроизводится в соответствии с формулой  $Y = Y_0 \cdot \text{sign } \dot{x}$ , для чего используется усилитель в ключевом режиме. Однако более детальная характеристика сухого трения имеет падающий участок, который в первом приближении можно аппроксимировать отрезком прямой (рис.10). Такую характеристику можно получить, например, при вычитании

ординат характеристик, показанных на рис.11.



Известно, что вычитанию ординат характеристик соответствует параллельное соединение нелинейностей, причем выходные сигналы нелинейностей следует подавать на входы сумматора с противоположными знаками.

2) Полюса передаточной функции. Анализ устойчивости. Расположение действительных полюсов на плоскости Z и порождаемые ими переходные процессы. W-преобразование и алгебраический критерий устойчивости

3.5. ПОЛЮСА ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

3.5.1. Расположение полюсов на плоскости z

*Действительные полюса*

В примере 3.4.1 было показано, что аperiodическому звену с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{1+Ts} = \frac{K'}{a+s}, \quad (3.5-1)$$

на входе которого нет экстраполятора, соответствует дискретная передаточная функция

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{K'(z)}{z-z_1} = \frac{K'}{1-a_1z^{-1}} \quad (3.5-2)$$

с полюсом в точке

$$z_1 = a_1 = e^{-aT_0}. \quad (3.5-3)$$

Разностное уравнение, описывающее эту систему, имеет вид

$$y(k) - a_1y(k-1) = K'u(k). \quad (3.5-4)$$

Полагая, что сигнал на входе системы отсутствует, т. е.  $u(k)=0, k \geq 0$ , и начальное значение выхода равно  $y(0) \neq 0$ , приходим к однородному разностному уравнению

$$y(k) - a_1y(k-1) = 0. \quad (3.5-5)$$

Отсюда можно получить следующую последовательность выходных сигналов:

$$\begin{aligned} y(1) &= a_1y(0), \\ y(2) &= a_1y(1) = a_1^2y(0), \\ &\vdots \\ y(k) &= a_1^ky(0). \end{aligned} \quad (3.5-6)$$

Переходный процесс в системе сходится к нулю, а сама система, следовательно, асимптотически устойчива только при условии  $|a_1| < 1$ . Вид переходных процессов для различных положений полюса  $a_1$  на плоскости z иллюстрируется рис. 3.5.1. Заметим, что при

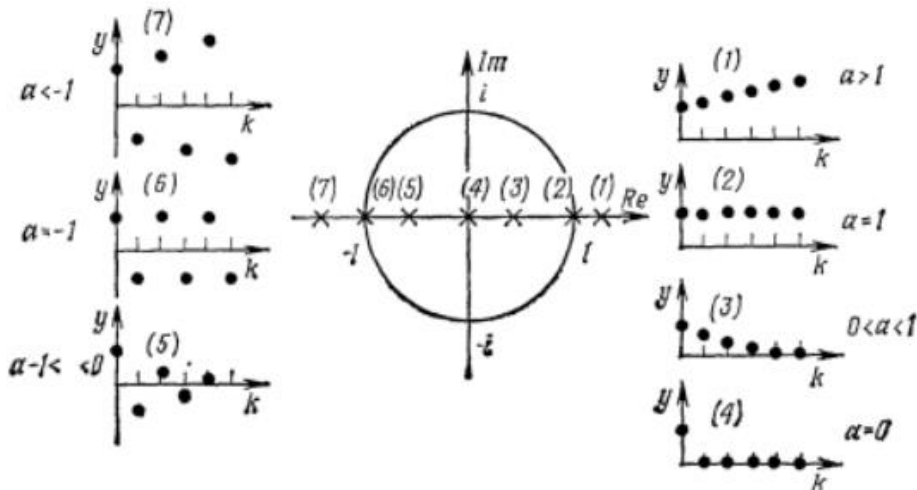


Рис. 3.5.1. Переходные процессы в системе с одним действительным полюсом.

отрицательных значениях  $a_1$  наблюдаются колебания.

Полюса передаточных функций системы по  $s$  и по  $z$  связаны соотношением

$$z_1 = a_1 = e^{-aT_0}.$$

Отсюда следует, что полюсам на плоскости  $s$ , расположенным в области  $-\infty < a < +\infty$ , на плоскости  $z$  соответствуют полюса  $\infty >$

$> z_1 > 0$ . Таким образом, на плоскости  $s$  отсутствует действительный полюс, соответствующий отрицательному значению  $z_1$ .

*Комплексно-сопряженные полюса*

Система второго порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2DTs + 1} = \frac{K(a^2 + \omega_1^2)}{(s+a)^2 + \omega_1^2} = \frac{K(a^2 + \omega_1^2)}{(s-s_1)(s-s_2)},$$

где  $a = D/T$ ,  $\omega_1^2 = 1/T^2(1 - D^2)$ ,  $s_{1,2} = -a \pm i\omega_1$ , без экстраполятора нулевого порядка при входе обладает дискретной передаточной

функцией

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{\left( \alpha K \frac{a^2 + \omega_1^2}{\omega_1} \sin \omega_1 T_0 \right) z}{z^2 - (2\alpha \cos \omega_1 T_0) z + \alpha^2} = \frac{b_1}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Здесь  $\alpha = e^{-aT_0}$ .

Полюса этой дискретной передаточной функции равны

$$z_{1,2} = \alpha [\cos \omega_1 T_0 \pm i \sin \omega_1 T_0] = \alpha e^{\pm i\omega_1 T_0}, \quad (3.5-7)$$

а соответствующее ей разностное уравнение имеет вид

$$y(k) - (2\alpha \cos \omega_1 T_0) y(k-1) + \alpha^2 y(k-2) = 0.$$

Запишем решение этого уравнения при начальных условиях  $y(0) = 0$  и  $y(1) = \alpha \cos \omega_1 T_0$ :

$$y(k) = \alpha^k \cos \omega_1 k T_0 \cdot y(0). \quad (3.5-8)$$

Графики изменения  $y(k)$  для положительных значений  $\alpha$  изображены на рис. 3.5.2. При отрицательных  $\alpha$  переходные процессы носят колебательный характер. Следует, однако, иметь в виду, что на плоскости  $s$  соответствующие этим значениям полюса не существуют.

Здесь  $\alpha = e^{-aT_0}$ .

Полюса этой дискретной передаточной функции равны

$$z_{1,2} = \alpha [\cos \omega_1 T_0 \pm i \sin \omega_1 T_0] = \alpha e^{\pm i \omega_1 T_0}, \quad (3.5-7)$$

а соответствующее ей разностное уравнение имеет вид

$$y(k) - (2\alpha \cos \omega_1 T_0) y(k-1) + \alpha^2 y(k-2) = 0.$$

Запишем решение этого уравнения при начальных условиях  $y(0) = 0$  и  $y(1) = \alpha \cos \omega_1 T_0$ :

$$y(k) = \alpha^k \cos \omega_1 k T_0 \cdot y(0). \quad (3.5-8)$$

Графики изменения  $y(k)$  для положительных значений  $\alpha$  изображены на рис. 3.5.2. При отрицательных  $\alpha$  переходные процессы носят колебательный характер. Следует, однако, иметь в виду, что на плоскости  $z$  соответствующие этим значениям полюса не существуют.

### 3.5.2. Условие асимптотической устойчивости

Линейная система именуется асимптотически устойчивой, если после конечного однократного воздействия она возвращается к своему положению равновесия. Проведенный выше анализ влияния расположения полюсов на переходные процессы показал, что данное условие соблюдается только в том случае, когда полюса находятся внутри единичного круга на плоскости  $z$ . Иными словами, корни характеристического уравнения

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m) = 0 \quad (3.5-9)$$

должны удовлетворять неравенству

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.5-10)$$

### 3.5.3. Билинейное преобразование и критерии устойчивости

Билинейное преобразование

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad (3.5-11)$$

переводит точки единичной окружности на плоскости  $z$  в точки, лежащие на мнимой оси плоскости  $w$ , а внутренность круга переходит в левую полуплоскость  $w$ . Поскольку плоскость  $w$  в теории дискретных систем служит аналогом плоскости  $s$  для непрерывных систем, в ней можно применять критерии устойчивости Рауса или Гурвица.

С этой целью произведем подстановку

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (3.5-12)$$

в знаменатель

$$A(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m \quad (3.5-13)$$

передаточной функции

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (3.5-14)$$

В результате имеем

$$\bar{A}(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^m + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{m-1} + \dots + a_m, \quad (3.5-15)$$

а после умножения на  $(1-w)^m$  — полином

$$\bar{A}(w) = (1+w)^m + a_1 (1+w)^{m-1} (1-w) + \dots + a_m (1-w)^m. \quad (3.5-16)$$

Применим критерий Гурвица к уравнению

$$\bar{A}(w) = 0. \quad (3.5-17)$$

